UNIDAD 5 — 6 JULIO 2010

Aplicaciones a las ED Lineales con coeficientes Constantes.

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

$f(x) \rightarrow$ Fza externa

Aplicaciones:

1. Resorte - Masa
2. Circuitos RLC
3. Señales

Sistema RESORTE - MASA.

+ Resorte. (Ley de Hook)

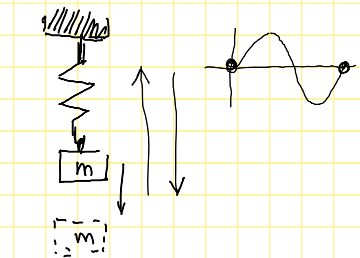
$$F = K \cdot s$$

F: Fuerza

K: Constante de Rigidez del Resorte

s: Es la separación de su extremo respecto a su longitud original

1



Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

$W = mg$

CASO I Mov. Libre No amortiguado (ideal)

- Sistema aislado, no hay fricción
- No hay amortiguamiento
- Las fuerzas son el $W = mg$ y la fuerza de restitución $F = K \cdot s$

2

Mov. Libre No amortiguado

$$y'' + \frac{K}{m} y = 0 \qquad \frac{K}{m} = \omega^2$$

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

$$\boxed{y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{Sen} \omega t}$$

Condiciones

① Posición inicial $\quad y(0) = y_0 \quad (t = 0)$

② Velocidad inicial $\quad y'(0) = \frac{dy}{dt} \Rightarrow$ Velocidad.

3

CASO (II) Mov. Libre Amortiguado

- Se sumerge en un medio viscoso
- El medio viscoso tiene una constante de amortiguamiento (positiva) c
- Fuerza retardadora $\quad c \frac{dy}{dt}$

$$\boxed{y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{K}{m} y = 0} \qquad 2\alpha = \frac{c}{m}$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

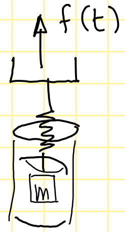
$\alpha = \omega \qquad y = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 t e^{-\alpha t} \qquad$ criticamente Amortiguado

$\alpha > \omega \qquad y = e^{-\alpha t}\left[C_1 e^{-\sqrt{|\alpha^2-\omega^2|}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{|\alpha^2-\omega^2|}\,t}\right] \qquad$ sobreamortiguado

$\alpha < \omega \qquad y = e^{-\alpha t}\left[C_1 \cos \sqrt{|\alpha^2-\omega^2|}\,t + C_2 \operatorname{Sen} \sqrt{\quad}\, t\right] \qquad$ subamortiguado

4

Caso III Mov. Forzado con amortiguamiento



$$y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = \frac{f(t)}{m}$$

$$2\alpha = \frac{c}{m} \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad F(t) = \frac{f(t)}{m}$$

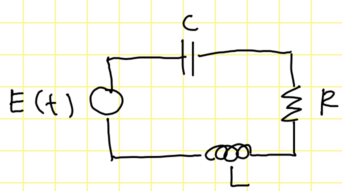
$$\boxed{y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = F(t)}$$

Variación de Parametros

Coeficientes indeterminados.

5

Caso IV Ctoo RLC



$$L q'' + R q' + \frac{1}{c} q = E(t)$$

$E(t) = 0 \implies$ Ecuación Auxiliar

$E(t) \neq 0 \implies$ Coef. Indet

Variación Parametros.

EJERCICIOS

¨◡

6

(E1) Contrapeso 8 Lb.
Resorte $K = 16$ Lb/ft.

Hallar: Ecuación del Movimiento y el periodo.

$W = 8$ Lb $\quad g = 32$ ft/s.

$$m = \frac{W}{g} = \frac{8 \text{ Lb}}{32 \text{ ft/s}} = \frac{1}{4} \text{ slugs.}$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{16 \text{ Lb/ft}}{\frac{1}{4} \text{ slug}} = 64 \text{ Lb/ft} \qquad \omega = 8$$

$$\boxed{y(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \operatorname{Sen} 8t}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4} \text{ seg.}}$$

7

(E2) Determinar la carga del capacitor de un cto RLC

$L = 0.05$ h $\quad R = 4\,\Omega \quad C = 0.01$ f $\quad E(t) = 0$ v.

Condiciones.

$\boxed{q(0) = 5 \text{ coulombs}}$ $\quad \{I(0) = 0 \text{ A.}\}$

Solución

$$0.05q'' + 4q' + 100q = 0$$

Ec. Aux.

$$0.05r^2 + 4r + 100 = 0 \quad \begin{cases} r_1 = -40 + 20i \\ r_2 = -40 - 20i \end{cases}$$

$$q(t) = e^{-40t}\left[C_1 \cos 20t + C_2 \operatorname{Sen} 20t\right]$$

$q(0) = 5$

$$5 = C_1 \overbrace{\cos(0)}^{1} + C_2 \overbrace{\operatorname{Sen}(0)}^{0}$$

$$\boxed{C_1 = 5}$$

8

$$q(t) = e^{-40t}\left[5\cos 20t + C_2 \operatorname{Sen} 20t\right]$$

$$\boxed{I(0) = 0}$$

$$\frac{dq}{dt}$$

$\operatorname{Sen} 20(0) = \operatorname{Sen}(0) = 0$

$\operatorname{Cos} 20(0) = \operatorname{Cos}(0) = 1$

$e^{-40(0)} = e^{0} = 1$

$$q'(t) = e^{-40t}\left[-100 \operatorname{Sen} 20t + 20C_2 \cos 20t\right] + \left[5\cos 20t + C_2 \operatorname{Sen} 20t\right]\left(-40e^{-40t}\right)$$

$t = 0 \qquad q'(t) = 0$

$C_2 = 10$

$0 = 20C_2 - 200$

$$q(t) = e^{-40t}\left[5\cos 20t + 10 \operatorname{Sen} 20t\right]$$

9

EJERCICIOS

① Peso 10 Lb, alarga 2 pulgadas.
Hallar: K, ec. mov, periodo y frecuencia.

② Peso 8 Lb, K = 2 Lb/ft.
medio $c = 1$
Si la pesa se suelta a 1 ft arriba de la posición de equilibrio con una velocidad 8 ft/s ↓
Hallar ec. movimiento.

10